

Egy tetőgeometriai alapképlet néhány alkalmazása

Előző dolgozatunkban – melynek címe:

Egy tetőgeometriai alapképlet skaláris levezetése – sík - trigonometria úton levezettük a

$$\cos \psi = -\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon \quad (K)$$

képletet, melyet nyugodtan hívhatunk tetőgeometriai alapképletnek. Ugyanis az ε szöget bezáró ereszevonalakból induló, φ_1 és φ_2 hajlású tetősíkok ψ lapszögét is meghatározhatjuk vele. Most azt nézzük meg, hogy milyen esetek jöhetnek valóban szóba (K) alkalmazása során.

A (K) képlet a 4 db szög - adat közti kapcsolatot írja le; ez azt is jelenti, hogy az 1 db egyenlet 1 db szög (szögfüggvényének) meghatározását teszi lehetővé.

1. eset

Adott: $\varepsilon, \varphi_1, \varphi_2$.

Keresett: ψ .

Ekkor közvetlenül (K) - ből:

$$\underline{\psi = \arccos(-\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon)} \quad (1)$$

2. eset

Adott: $\psi, \varphi_1, \varphi_2$.

Keresett: ε .

Most (K) átrendezésével:

$$\frac{\cos \psi + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2} = \cos \varepsilon \rightarrow$$

$$\underline{\varepsilon = \arccos\left(\frac{\cos \psi + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2}\right)} \quad (2)$$

3. eset

Adott: ε, ψ .

Keresett: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$.

Ekkor (K) - ből:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= -\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cdot \cos \varepsilon = -(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cdot \cos \varepsilon) = \\ &= -(1 - \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cdot \cos \varepsilon) = -[1 - \sin^2 \varphi \cdot (1 + \cos \varepsilon)] , \end{aligned}$$

$$\cos \psi = \sin^2 \varphi \cdot (1 + \cos \varepsilon) - 1 \rightarrow \frac{1 + \cos \psi}{1 + \cos \varepsilon} = \sin^2 \varphi \rightarrow \sin \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos \psi}{1 + \cos \varepsilon}} ,$$

innen:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\cos\psi}{1+\cos\varepsilon}}\right). \quad (3)$$

4. eset

Adott: $\varepsilon, \psi, \varphi_2$.

Keresett: φ_1 .

Ekkor kiindulunk (K) másként rendezett alakjából:

$$\begin{aligned} \cos\psi &= -\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\varepsilon \rightarrow \\ (\sin\varphi_2 \cdot \cos\varepsilon) \cdot \sin\varphi_1 + (-\cos\varphi_2) \cdot \cos\varphi_1 &= \cos\psi; \end{aligned} \quad (4)$$

új jelölésekkel:

$$\varphi_1 = x, \quad a = \sin\varphi_2 \cdot \cos\varepsilon, \quad b = -\cos\varphi_2, \quad c = \cos\psi, \quad (5)$$

majd (4) és (5) - tel:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c. \quad (6)$$

A (6) egyenlet egy ismert típusú trigonometrikus egyenlet – ld. pl.: [1]!

Megoldása zárt alakú képlettel is lehetséges. Jelen esetben a másodfokú egyenletes megoldási mód tűnik célszerűbbnek – pl. a segédszöges megoldási módhoz képest.

A részletek az alábbiak.

Trigonometriai azonosságokkal:

$$\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad (7/1)$$

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \quad (7/2)$$

Most (6) és (7) - tel:

$$a \cdot 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + b \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = c. \quad (8)$$

Rendezve:

$$\begin{aligned} 2 \cdot a \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} + b \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) &= c \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right), \\ 2 \cdot a \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - b \cdot \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} &= c + c \cdot \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}, \\ (c + b) \cdot \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2 \cdot a \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} + (c - b) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

A (9) másodfokú egyenletet a megoldó - képlettel megoldjuk, az

$$u = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (9/1)$$

helyettesítéssel is élve:

$$(c+b) \cdot u^2 - 2 \cdot a \cdot u + (c-b) = 0 ;$$

$$u_{1,2} = \frac{2 \cdot a \pm \sqrt{4 \cdot a^2 - 4 \cdot (c+b) \cdot (c-b)}}{2 \cdot (c+b)} = \frac{2 \cdot a \pm 2 \cdot \sqrt{a^2 - (c+b) \cdot (c-b)}}{2 \cdot (c+b)} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (c+b) \cdot (c-b)}}{c+b} ,$$

$$u_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (c^2 - b^2)}}{c+b} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c+b} ; \quad (10)$$

most (9/1) és (10) - zel:

$$\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)_{1,2} = \operatorname{tg} \frac{x_{1,2}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c+b} \rightarrow \frac{x_{1,2}}{2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c+b} \right) \rightarrow$$

$$x_{1,2} = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c+b} \right) ,$$

innen:

$$\underline{x_1 = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c+b} \right)} , \quad \underline{x_2 = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c+b} \right)} . \quad (11)$$

Az (5) és (11) képletekkel előttünk áll a (4) egyenlet 2 db megoldása.

Ennél lényegesen egyszerűbb és kényelmesebb a (4) egyenletet rögtön a számadatokkal felírni és grafikusán megoldani. Például az előző dolgozatban alkalmazott / kapott $\varphi_2 = 60^\circ$, $\varepsilon = 120^\circ$, $\psi = 131,2800169^\circ$ (A)

adatokkal / eredménnyel és (11) - gyel némi számolás után kapjuk, hogy:

$$\underline{\varphi_{1,1,num} = 36,78678973^\circ} , \quad \underline{\varphi_{1,2,num} = 44,99999957^\circ} . \quad (E1)$$

A grafikus megoldást az 1. ábra szemlélteti. Ezek szerint:

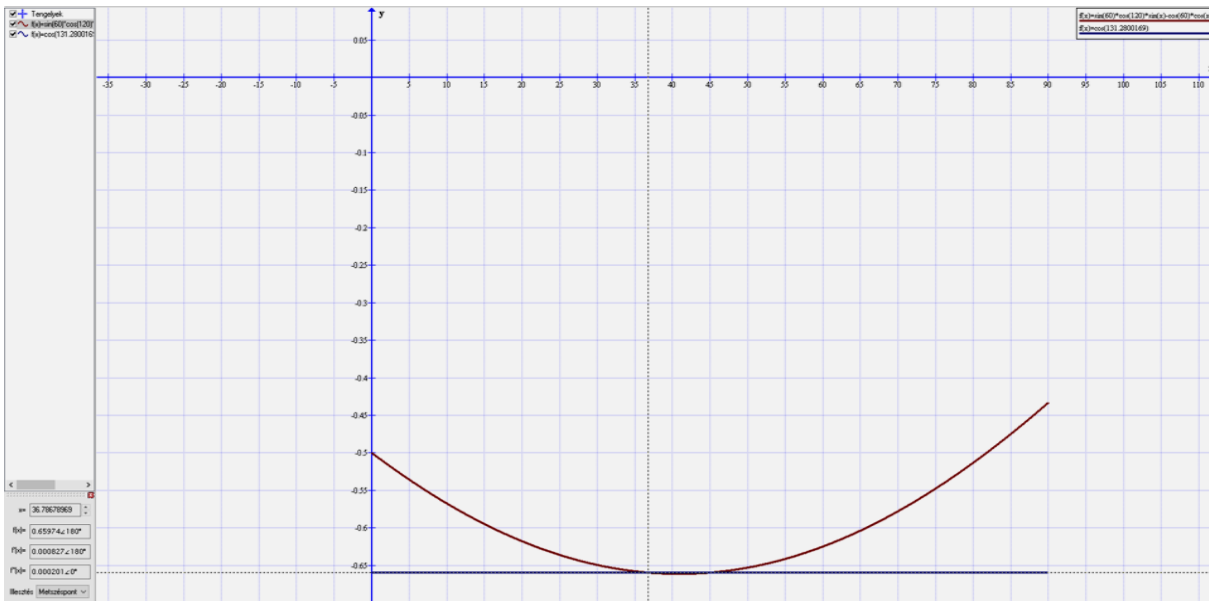
$$\underline{\varphi_{1,1,graf} = 36.78678969^\circ} , \quad \underline{\varphi_{1,2,graf} = 44.99999961} . \quad (E2)$$

Látjuk, hogy a kétféle úton kapott eredmények közti eltérés a fok tízmilliomod részében van, így az már teljesen jelentéktelennek mondható. Ezek szerint a végeredmény:

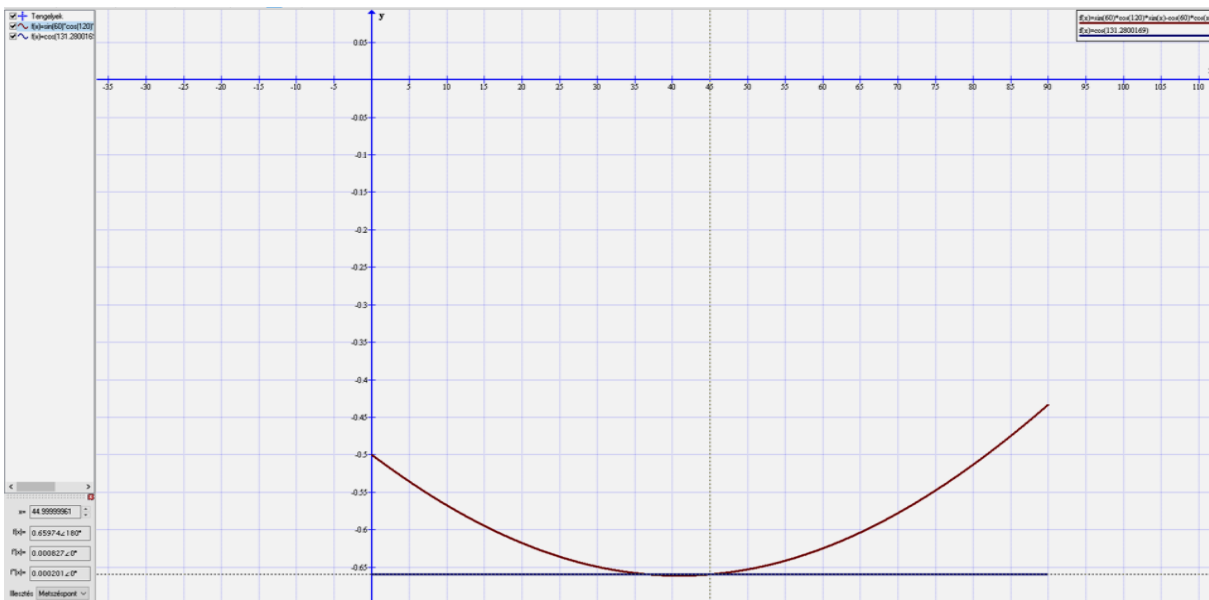
$$\underline{\varphi_{1,1} \approx 36,8^\circ} , \quad \underline{\varphi_{1,2} \approx 45,0^\circ} . \quad (E3)$$

Az előző dolgozatbeli példában $\varphi_1 = 45^\circ$ volt, mellyel ψ (A/3) - beli értékét megkaptuk. Látjuk, hogy φ_1 - re két használható eredményt is kaptunk; ugyanis mindkettő megfelel a $0 < \varphi_1 < 90^\circ$ feltételnek. Erre – meglehet – nem számítottunk.

Elképzeltető, hogy vizsgálódásunk gyakorlati haszonnal is bír.



1 / 1. ábra



1 / 2. ábra

Megjegyzések:

M1. Az (E1) eredményeket tudományos zsebszámológép alkalmazásával állítottuk elő.

M2. Fentebb azt írtuk, hogy a (K) egyenlet 1 db szög (szögfüggvényének) meghatározását teszi lehetővé. Láttuk, hogy a (9) másodfokú egyenletnek ugyanarra az 1db szög - függvényre 2 db megoldása is adódott; vagyis tényleg nem mondhatjuk azt, hogy 1 db egyenletből általában 1 db szög értékét határozhatjuk meg, megoldásként.

M3. Ezek után érdemes lehet feladatokat kitalálni és azokat megoldani, gyakorlásként.

Egy ilyen lehet az alábbi is.

A feladat

Egy tetőépítési feladat során *derékszögű lapszöget* kell kialakítanunk.

- a) Milyen összefüggésnek kell fennállnia ekkor a tető jellemző szög - adatai között?
- b) Milyen összefüggéseket kapunk, ha a tetősíkok egyező hajlásúak?

A megoldás

a) A (K) képletben érvényesítve, hogy

$\psi = 90^\circ \rightarrow \cos \psi = 0$, így kapjuk, hogy:

$$-\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon = 0 \rightarrow$$

$$\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon = \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \rightarrow \underline{\underline{\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon = 1}} . \quad (a)$$

b) Most (a) - ban érvényesítve a $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ követelményt:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos \varepsilon} \rightarrow \operatorname{tg} \varphi = (+) \frac{1}{\sqrt{\cos \varepsilon}} \rightarrow \underline{\underline{\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \varepsilon}} \right)}} ; \quad (b)$$

vagy:

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right)}} \rightarrow 45^\circ < \varphi < 90^\circ . \quad (c)$$

Ezen eredmények szerint derékszögű lapszög akkor jöhet létre, ha az ereszvonalak hegyesszöget zárnak be, a tetősíkok hajlása pedig jellemzően a **45°** és **90°** közötti szög - tartományban marad. Ez magastetők és meredek tetők esetében állhat elő.

A derékszögű lapszög előírása érdekes lehet pl. akkor, ha az élgerincet derékszögű szög - vassal kívánjuk kialakítani.

1. PÉLDA

Derékszögű lapszöget kívánunk kialakítani **60°** - os hajlású tetősíkokkal.

Mekkora lehet az ereszvonalak által bezárt szög?

Válasz:

$$\underline{\underline{\varepsilon = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right) = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 60^\circ} \right) = 70,529^\circ \approx \underline{\underline{70,5^\circ}}}} , \quad (d)$$

tehát az ereszvonalak ekkor **70,5°** - os szöget zárhatnak be.

2. PÉLDA

Derékszögű lapszöget kívánunk kialakítani 45° és 60° - os hajlású tetősíkokkal. Mekkora lehet az eresztvonalak által bezárt szög?

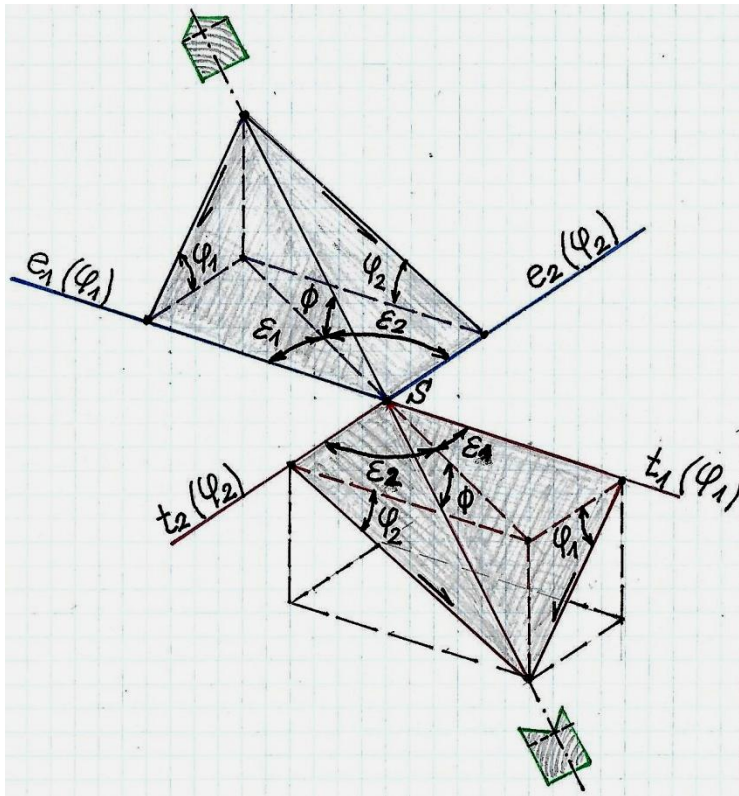
Válasz:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon &= 1 \rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos \varepsilon = 1 \rightarrow \cos \varepsilon = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}} \rightarrow \\ \underline{\varepsilon} &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,736^\circ \approx \underline{54,7^\circ}, \end{aligned} \quad (e)$$

tehát az eresztvonalak ekkor $54,7^\circ$ - ot zárhatnak be.

Észrevételek:

É1. A feladat szövegéből nem derül ki, hogy élgerinc vagy hajlatgerinc esete áll - e fenn. Ehhez tekintsük a 2. ábrát! (Ezt már korábban is megmutattuk.)



2. ábra

Itt $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ az élben metsződő két tetősík eresztvonalai, $\mathbf{t}_1$ és $\mathbf{t}_2$ pedig a vágában metsződő két tetősík taréjvonalai. Látjuk, hogy a tetősíkok lapszöge ugyanaz, ha ε , φ_1 , φ_2 ugyanaz a két tetőre. A szerkezeti elem szempontjából annyi a különbség, hogy az élhez tartozó

szarugerenda felülről nézve domború, a vápához tartozó pedig homorú.
Összegezve: a feladatban mindegy, hogy élről vagy vápáról van - e szó.

É2. Az (K) egyenletből is következik, hogy ha az ereszvonalak merőlegesek egymásra, akkor merőleges lapszög nem érhető el hegyesszögű tetőhajlásokkal: az $\varepsilon = 90^\circ$ esetén előálló $\cos \psi = -\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2$ összefüggésben hegyesszögű tetőhajlások esetén a jobb oldal negatív, ezért a lapszög tompaszög lesz. Ha egyik vagy mindkét tetősík függőleges, akkor merőleges ereszsarok esetén is előállhat a derékszögű lapszög. Ez a helyzet tetőknél már nem megengedett: a függőleges síkú épületszerkezeteket ugyanis falaknak nevezzük. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó készítsen vázlatrajzokat az imént leírt geometriai helyzetekről!

É3. Látható, hogy a (K) képletben a φ_1 és φ_2 mennyiségek szimmetrikusan szerepelnek, így akár egymással fel is cserélhetők. Ezt elmondhatjuk a 4. eset eredményeivel kapcsolatban is.

É4. Fel kell tenni a kérdést, hogy a fenti két példa esetében milyen helyzetű síkban helyezkedik el pl. az élgerinc. Ennek megválaszolását már rábizzuk az érdeklődő Olvasóra.

.....

M5. Talán meglepőnek is mondható, hogy az „olyan kis ártatlan” - nak tűnő (K) képlet alkalmazása mekkora nehézségeket is okozhat. Jobb, ha gyakoroljuk a használatát!

M6. A figyelmes Olvasónak nem lesz meglepő, ha itt ismét a *Tetőgeometria* tantárgy és a kapcsolt tan - és szakkönyvek, folyóiratok jelenlegi hiányára és azonnali szükségességére hívjuk fel a figyelmet, az ács szakképzés vonatkozásában is. Ugyanis az itteni gyakorlatokhoz hasonlóknak is helye van egy leendő tetőgeometriai példatárban. Külföldön már régóta vannak ilyenek: nyomtatott kiadványok és internetes oldalak formájában is. A szint – hogy milyen olvasóközönséget céloznak meg velük – az egyáltalán nem mindegy. Így pl. a [2] mű szakmunkások, a [3] honlap pedig inkább technikusok, mérnökök érdeklődésére tarthat számot.

M7. Hogy nem teljesen kitaláció a szögvasból készített élszaru, azt alátámaszthatja a 3. ábra is. Az itteni templomtorony - váz szerkezeti részleteiről nincsenek részletes információink. (Itt élszaruvás lehetne a helyénvaló kifejezés, az élszarufa mintájára.) A 4. ábra szövegében olvashatjuk, hogy öntöttvas szerkezetről van szó, a tervezés / építés idejében. Azóta ez változhatott. Tény, hogy e templom ma is Vác egyik látványossága.



3. ábra – forrása: [4]

A templom tornya ügyében is sürgősen lépni kellett. Kempe Edmund a templomra öntött vas tornyot tervezett. ...

A lyukas torony miatt sok kellemetlenség keletkezett. A gyülekezet folyamatosan gyűjtött, de a pénzt mindig elvitte valami más. Már 1869-ben a gyülekezet gondnoka – Pertzián Gusztáv – azt javasolta, hogy pléh táblákkal kellene beborítani. 1927-ben a gyülekezeti épületek tervezésekor is előkerült a téma. Akkor Sándy Gyula építészrt kérték fel, hogy az épületek tervezésével egy időben a torony borítását is készítse elő. Ő akkor, ezt mondta: *“A torony úgy jó, ahogyan van!”*. Soha többet nem került elő az ötlet.



4. ábra – forrása: [5]

Források:

- [1] – **Obádovics J. Gyula:** Matematika
15. kiadás, Scolar Kiadó, Budapest, 1998., 429 ~ 430. o.
- [2 / 1] – **Johannes Karduck ~ Richard Stein:** Dachgeometrie
3. Auflage, Verlagsgesellschaft Rudolf Müller GmbH, Köln-Braunsfeld 1985.
- [2 / 2] – **Hans - Peter Lambertz ~ Johannes Karduck:**
Formelsammlung Dachgeometrie mit Beispielen
Verlagsgesellschaft Rudolf Müller GmbH, Köln 1992.
- [2 / 3] – **Johannes Karduck ~ Hans - Peter Lambertz ~ Michael Schäfer:**
Aufgabensammlung Fachrechnen Dachgeometrie
3. Auflage, Verlagsgesellschaft Rudolf Müller GmbH, Köln 1998.
- [3] – https://www.geocities.ws/web_sketches/
- [4] – https://img1.utazzitthon.hu/images/latnivalo/mtzrt/6_77032/vaci-evangelikus-templom-23074-1-m.jpg
- [5] – <http://vacievanglikus.hu/templomepites/>

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2021. 11. 14.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>